Analiza Matematyczna M3, Wydział Matematyki, lista 0

Zadanie 1. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji:

a) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ b) $g(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, c) $h(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$

d) $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, e) $v(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, f) $w(x,y,z) = x^{\left(\frac{y}{z}\right)}$.

Zadanie 2. Oblicz pochodne funkcji złożonych:

a) $f(x,y) = \arcsin(x-y),\ x = 3t,\ y = 4t^3,\ \ \frac{df}{dt} = ?$,
b) $g(x,y) = x^2y - y^2x,\ x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ \frac{\partial g}{\partial u} = ?,\ \frac{\partial g}{\partial v} = ?$,
c) $h(x,y) = x^2 \ln y,\ x = \frac{u}{v},\ y = 3u - 2v,\ \ \frac{\partial h}{\partial u} = ?,\ \frac{\partial h}{\partial v} = ?$

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu 2 i określmy $h(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Sprawdź, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}.$$

Zadanie 4. Dwoma sposobami (z definicji oraz z wykorzystaniem gradientu) oblicz pochodne podanych funkcji w zadanych punktach i kierunkach:

a) funkcja $f(x,y,z) = xy^2z^3$, punkt $M = (3,2,1)$, kierunek $\vec{MN}$, gdzie $N = (5,4,2)$,
b) funkcja $f(x,y) = x^2 - y^2$, punkt $M = (1,1)$, $\vec{v}$ to wersor tworzący kąt skierowany $60°$ z dodatnią półosią Ox,
c) funkcja $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, punkt $M = (3,4)$, kierunek $\vec{v}$=**grad** f w tym punkcie,
d) funkcja $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, punkt $M = (1,2,1)$, w kierunku wektora $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Zadanie 5. Oblicz długość gradientu i jego cosinusy kierunkowe (tzn. cosinusy kątów, jaki gradient tworzy z wersorami osi układu) dla podanych funkcji i punktów:

a) $u(x,y,z) = \frac{1}{r}$, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, w punkcie $M = (x_0, y_0, z_0)$,
b) $u(x,y,z) = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ w punkcie $M = (\pi/4, \pi/3, \pi/2)$.
Co wskazuje gradient?